第 16 講　数列の和と一般項

16　次の各問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}$ は

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{4^k} a_k = \frac{3n^2+n}{2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているとする．このとき a_n を求めよ．また，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

(2)　次の条件で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1,\ \frac{2^n}{n!} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k a_{n+2-k} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　数列の和と一般項

16　任意の自然数 n に対して，関係式

$$3a_{n+1}=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_1$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ について，$a_1=1$ のとき，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ について $S_{2m}<\dfrac{39}{32}$ が成り立つような自然数 m の最小値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$m=8$　　㋑　$m=6$　　㋒　$m=4$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 16 講　数列の和と一般項

16 次の各問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{4^k}a_k=\frac{3n^2+n}{2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしているとする．このとき a_n を求めよ．また，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ．

(2) 次の条件で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1=1,\ \frac{2^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n+1}a_ka_{n+2-k}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

【答】 (1) $a_n=\dfrac{(3n-1)4^n}{n(n+1)}$，$S_n=\dfrac{4(4^n-n-1)}{n+1}$　(2) $a_n=\dfrac{1}{(n-1)!}$

【解答】

(1) $n=1$ のとき $\dfrac{1\cdot2}{4^1}a_1=\dfrac{3\times1^2+1}{2}$　　$\therefore\ a_1=4$

$n\geqq2$ のとき

$$\frac{n(n+1)}{4^n}a_n=\frac{3n^2+n}{2}-\frac{3(n-1)^2+(n-1)}{2}$$
$$=3n-1$$
$$\therefore\ a_n=\frac{(3n-1)4^n}{n(n+1)}$$

よって　$a_n=\begin{cases}4 & (n=1)\\ \dfrac{(3n-1)4^n}{n(n+1)} & (n\geqq2)\end{cases}=\boldsymbol{\dfrac{(3n-1)4^n}{n(n+1)}}\quad(n\geqq1)$

このとき　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(3k-1)4^k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{4^k}{k}+\dfrac{4^{k+1}}{k+1}\right)=-\dfrac{4^1}{1}+\dfrac{4^{n+1}}{n+1}=\boldsymbol{\dfrac{4(4^n-n-1)}{n+1}}$

(2) 一般項を　$a_n=\dfrac{1}{(n-1)!}$　……①　と予想する．

$n=1$ のとき $a_1=1$，$\dfrac{1}{0!}=1$ より①は成り立つ．

$n=l(\geqq1)$ のとき $a_j=\dfrac{1}{(j-1)!}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ を仮定すると

$$\frac{2^l}{l!}=\sum_{k=1}^{l+1}a_ka_{l+2-k}=2a_1a_{l+1}+\sum_{k=2}^{l}a_ka_{l+2-k}$$

より

$$a_{l+1}=\frac{2^{l-1}}{l!}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{l}a_ka_{l+2-k}$$
$$=\frac{2^{l-1}}{l!}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{l}\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{(l+1-k)!}$$
$$=\frac{2^{l-1}}{l!}-\frac{1}{2l!}\sum_{k=2}^{l}\frac{l!}{(k-1)!(l+1-k)!}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$=\frac{1}{2l!}\left(2^l-\sum_{k=2}^{l}{}_lC_{k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2l!}\{2^l-(2^l-2)\}=\frac{1}{l!}$$

となるので，$n=l+1$ のときにも①は成り立つ.

　よって数学的帰納法により

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{(n-1)!}}\quad (n\geqq 1)$$

が示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　数列の和と一般項

16　任意の自然数 n に対して，関係式

$$3a_{n+1}=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_1$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ について，$a_1=1$ のとき，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ について $S_{2m}<\frac{39}{32}$ が成り立つような自然数 m の最小値を求めよ.

【選択肢】

㋐　$m=8$　　㋑　$m=6$　　㋒　$m=4$

【答】　㋒

【解答】

与式と与式の n に $n-1$ を代入した式

$$3a_{n+1}=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_1$$

$$3a_n=\qquad a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-2}a_1$$

の辺々を加えると

$$3a_{n+1}+3a_n=a_n \qquad \therefore\quad a_{n+1}=-\frac{2}{3}a_n \quad (n\geqq 2) \quad\cdots\cdots①$$

与式において $n=1$ とすると

$$3a_2=a_1 \qquad \therefore\quad a_2=\frac{1}{3}a_1$$

①より

$$a_n=-\frac{2}{3}a_{n-1}=\cdots\cdots=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}a_2$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}a_1$$

$a_1=1$ より $n\geqq 2$ の n に対しては

$$a_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

よって

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2} & (n\geqq 2)\\ 1 & (n=1)\end{cases}$$

ここで，$n\geqq 2$ のとき

$$S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$=1+\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{6-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

となるので，$2m \geqq 2$ より

$$S_{2m}=\frac{1}{5}\left\{6-\left(-\frac{2}{3}\right)^{2m-1}\right\}=\frac{1}{5}\left\{6+\left(\frac{2}{3}\right)^{2m-1}\right\}<\frac{39}{32}$$

したがって $\left(\frac{2}{3}\right)^{2m-1}<\frac{3}{32}$ となり，これを整理すると $2^{2m+4}<3^{2m}$　　$\therefore$　$16\cdot 4^m<9^m$

$m=1$，2 のとき $16\cdot 4^m>9^m$ となる．

$m=3$ のとき $16\cdot 4^m=1024$，$9^m=729$

$m=4$ のとき $16\cdot 4^m=4096$，$9^m=6561$

よって，求める m は

$$\boldsymbol{m=4}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。